

数 学

氏 名	
-----	--

受 験 番 号	
------------	--

1 xy 平面上で、自然数 n に対し単位円上の点 $(\cos(\sqrt{2}\pi n), \sin(\sqrt{2}\pi n))$ を P_n とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) 自然数 n と m が異なるならば、点 P_n と P_m は異なることを示せ。
- (2) $x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲に属する点 P_n は無限に多く存在することを示せ。

[解答欄]

(1)
 $n \neq m$ かつ $P_n = P_m$ と仮定して矛盾をみちびく。

$$\begin{aligned}
 &P_n = P_m \\
 \Leftrightarrow &\cos \sqrt{2}n\pi = \cos \sqrt{2}m\pi \text{ かつ } \sin \sqrt{2}n\pi = \sin \sqrt{2}m\pi \\
 \Leftrightarrow &\sqrt{2}n\pi - \sqrt{2}m\pi = 2\pi k \text{ となる整数 } k \text{ が存在する。} \\
 \Rightarrow &\sqrt{2} = \frac{2k}{n-m} \text{ (整数 } n-m \neq 0 \text{ かつ 整数 } k \text{ が存在する。)}
 \end{aligned}$$

これは $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。

(2) (1) から $\cos \sqrt{2}n\pi \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる自然数 n が無限個存在することを示せばよい。

$\cos \sqrt{2}n\pi \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ であるための必要十分条件は、

$$-\frac{3}{4}\pi + 2\pi k \leq \sqrt{2}n\pi \leq \frac{3}{4}\pi + 2\pi k \quad \dots\dots\dots (*)$$

となる自然数 k が存在することである。整理すると

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(2k - \frac{3}{4} \right) \leq n \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2k + \frac{3}{4} \right)$$

となる自然数 k が存在することである。このとき

$$(\text{右辺}) - (\text{左辺}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2k + \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2k - \frac{3}{4} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{4} > 1$$

であるから、区間 $\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(2k - \frac{3}{4} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2k + \frac{3}{4} \right) \right]$ には、少なくとも一つ自然数 n_k が含まれ $\cos \sqrt{2}n_k\pi \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす。

つまり (*) において

$$-\frac{3}{4}\pi + 2\pi k \leq \sqrt{2}n_k\pi \leq \frac{3}{4}\pi + 2\pi k$$

を満たす n_k が少なくとも1つある。そして k が異なると (*) の区間は交わらないことから、条件を満たす自然数 n は無限個存在する。

数 学

氏名

受験
番号

2

関数 $f(x) = xe^{-x}$ について以下の問いに答えよ。(1) すべての実数 x について、不等式 $f(x) \leq \frac{1}{e}$ が成り立つことを証明せよ。(2) 曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = 0, y = \frac{1}{e}$ で囲まれた部分 D の面積を求めよ。(3) (2) の D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

[解答欄]

(1)

$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$ より $f(x)$ は $x < 1$ で単調増加、 $x > 1$ で単調減少である。
よって $f(x)$ は $x = 1$ で最大値 $f(1) = \frac{1}{e}$ をとることから、 $f(x) \leq \frac{1}{e}$ が成り立つ。

(2)

$$\begin{aligned} D \text{ の面積} &= 1 \times \frac{1}{e} - \int_0^1 f(x) dx \\ &= \frac{1}{e} - \int_0^1 x(-e^{-x})' dx \\ &= \frac{1}{e} + [xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{e} + \frac{1}{e} + [e^{-x}]_0^1 = \frac{3}{e} - 1 \end{aligned}$$

(3)

求める体積 $V = \pi \int_0^{\frac{1}{e}} x^2 dy$ である。 $I = \int_0^{\frac{1}{e}} x^2 dy$ とおく。

$$I = \int_0^1 x^2 f'(x) dx = \int_0^1 x^2 (e^{-x} - xe^{-x}) dx = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx - \int_0^1 x^3 e^{-x} dx$$

ここで

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{とおくと}$$

$$I_n = \int_0^1 x^n (-e^{-x})' dx = [-x^n e^{-x}]_0^1 + nI_{n-1} = -\frac{1}{e} + nI_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e} \quad \text{より}$$

$$I = I_2 - I_3 = I_2 - \left(-\frac{1}{e} + 3I_2\right) = \frac{1}{e} - 2I_2 = \frac{1}{e} - 2\left(-\frac{1}{e} + 2I_1\right) = \frac{3}{e} - 4I_1 = \frac{3}{e} - 4\left(-\frac{2}{e} + 1\right) = \frac{11}{e} - 4$$

よって $V = \pi\left(\frac{11}{e} - 4\right)$

数 学

氏名

受験
番号

3

$t = \cos \theta$ とする。自然数 n について、ド・モアブルの定理 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ が成り立つことにより $\cos n\theta$ を t の n 次多項式として表すことができる。この多項式を $f_n(t)$ とし、変数 t についての $f_n(t)$ の導関数を $f'_n(t)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $f_6(t)$ を求めよ。

(2) 自然数 m について $f_{2m}(t)$ の t^{2m} の係数を求めよ。

(3) $f_n(t)^2 + (1-t^2) \left\{ \frac{1}{n} f'_n(t) \right\}^2 = 1$ が成り立つことを示せ。

[解答欄]

(1)

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^6 = \sum_{k=0}^6 {}_6C_k \cos^{6-k} \theta \cdot (i \sin \theta)^k \text{ において}$$

$$\begin{aligned} \text{右辺の実部} &= \sum_{k=0}^3 {}_6C_{2k} \cos^{6-2k} \theta \cdot (i \sin \theta)^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^3 {}_6C_{2k} t^{6-2k} (-1)^k (1-t^2)^k \\ &= t^6 - 15t^4(1-t^2) + 15t^2(1-t^2)^2 - (1-t^2)^3 \\ &= 32t^6 - 48t^4 + 18t^2 - 1 \end{aligned}$$

(2)

$$f_{2m}(t) = \sum_{k=0}^m {}_{2m}C_{2k} t^{2m-2k} (-1)^k (1-t^2)^k \text{ より } t^{2m} \text{ の係数} = \sum_{k=0}^m {}_{2m}C_{2k} (-1)^k (-1)^k = \sum_{k=0}^m {}_{2m}C_{2k}$$

ここで $A = \sum_{k=0}^m {}_{2m}C_{2k}$, $B = \sum_{k=1}^m {}_{2m}C_{2k-1}$ とすると

$$(1+1)^{2m} = A+B, \quad (1-1)^{2m} = A-B \text{ より } A = \frac{1}{2} \times 2^{2m} = 2^{2m-1}$$

(3)

$\cos n\theta = f_n(\cos \theta)$ を θ で微分すると $-n \sin n\theta = -f'_n(\cos \theta) \sin \theta$ である。

よって $\sin n\theta = \frac{1}{n} f'_n(\cos \theta) \sin \theta$ であることから

$$\begin{aligned} f_n(t)^2 + (1-t^2) \left\{ \frac{1}{n} f'_n(t) \right\}^2 &= f_n(t)^2 + \left\{ \frac{1}{n} f'_n(t) \sin \theta \right\}^2 \\ &= \cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta \\ &= 1 \end{aligned}$$

数 学

氏 名

受 験
番 号

4

$a^2 + b^2 = c^2$ を満たす 3 つの自然数 a, b, c の組 (a, b, c) を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) a と b の差は 1 であり、 b と c の差が 1 であるとき (a, b, c) の組をすべて求めよ。
 (2) b は 2 の累乗であり、 b と c の差が 1 であるとき (a, b, c) の組をすべて求めよ。

[解答欄]

(1)

$c^2 = a^2 + b^2 > b^2$ かつ $b, c > 0$ より $c > b$ である。 よって $c = b + 1$

また、 $b = a + 1$ である。 $\therefore a = b + 1$ とすると $a = c$ となり $a < c$ に矛盾する。

よって $(a, b, c) = (a, a + 1, a + 2)$

$a^2 + b^2 = c^2$ より $a^2 + (a + 1)^2 = (a + 2)^2$ 。 故に $a^2 - 2a - 3 = 0$

$(a - 3)(a + 1) = 0$ かつ $a > 0$ であることから、 $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ を得る。

(2)

(1) と同様にして $c = b + 1$ である。 このことから b と c は互いに素である。

また、 a と c も互いに素である。

$\therefore a$ と c が公約数 $k > 1$ をもつとすると $a^2 + b^2 = c^2$ より b も k を約数にもつことから b と c は互いに素であることに矛盾する。

さらに a と c は共に奇数である。

$\therefore b$ が偶数であることと $a^2 + b^2 = c^2$ であることから、もし a または c が偶数とすると、それらは共に偶数となるが、これは a と c が互いに素であることに反する。

このとき

$c = a + 2$ であることがわかる。

$\therefore b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$ かつ b が 2 の累乗であるので

$c + a = 2^k$, $c - a = 2^\ell$ となる 0 以上の整数 k, ℓ が存在する。

明らかに $k > \ell$ であり、 $a = 2^{k-1} - 2^{\ell-1}$, $c = 2^{k-1} + 2^{\ell-1}$ である。

もし $\ell > 1$ ならば $k - 1 > \ell - 1 \geq 1$ であることから

a と c は共に偶数となり、 a と c が共に奇数であることに矛盾する。

よって $\ell \leq 1$ である。

一方 $\ell = 0$ のとき $a - c = 1$ となり 同様に矛盾する。

したがって $\ell = 1$ である。

$c = b + 1$ かつ $c = a + 2$ であることから $(a, b, c) = (a, a + 1, a + 2)$ となり、

(1) と同様にして $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ を得る。

数 学

氏名

受験
番号

5

四面体 OABC において $\triangle ABC$ の重心を G とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。辺 OC 上に点 P をとり、 $\overrightarrow{OP} = t\vec{c}$ ($0 < t < 1$) とする。さらに $\triangle ABP$ と線分 OG との交点を X とし、 $\overrightarrow{OX} = s\overrightarrow{OG}$ ($0 < s < 1$) とする。

このとき以下の問いに答えよ。

- (1) \overrightarrow{PX} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} と t , s を用いて表せ。
- (2) 2点 P, X を結ぶ直線と線分 AB との交点 M が AB の中点であることを証明せよ。
- (3) $\triangle OMC$ において 2点 C, X を結ぶ直線と線分 OM との交点を N とする。NX : XC = 2 : 5 のとき t と s の値を求めよ。

[解答欄]

(1)

$$\overrightarrow{OP} = t\vec{c}, \quad \overrightarrow{OX} = s\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \quad \text{より} \quad \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} = \frac{s}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b} + \frac{s-3t}{3}\vec{c}$$

(2)

PX を延長した線分と AB との交点を M とする。

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + r\overrightarrow{PX}$ となる $r > 1$ が存在する。

$$(1) \text{より} \quad \overrightarrow{OM} = t\vec{c} + r\left(\frac{s}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b} + \frac{s-3t}{3}\vec{c}\right) = \frac{rs}{3}\vec{a} + \frac{rs}{3}\vec{b} + \frac{r(s-3t) + 3t}{3}\vec{c} \text{ である。}$$

一方 M は AB 上にあることから $\overrightarrow{OM} = k\vec{a} + (1-k)\vec{b}$ ($0 \leq k \leq 1$) と表せる。

$$\text{よって} \quad \frac{rs}{3} = k, \quad \frac{rs}{3} = 1 - k, \quad r(s-3t) + 3t = 0$$

したがって $k = 1 - k$ であることから $k = \frac{1}{2}$ となり M は AB の中点である。

(3)

N は OM を $u : 1 - u$ に内分しているとする。

$$\text{このとき} \quad s\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OX} = \frac{5}{7}u\overrightarrow{OM} + \frac{2}{7}\vec{c} \quad \text{より} \quad s\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} = \frac{5}{7}u\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \frac{2}{7}\vec{c}$$

$$\text{よって} \quad \frac{s}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b} + \frac{s}{3}\vec{c} = \frac{5u}{14}\vec{a} + \frac{5u}{14}\vec{b} + \frac{2}{7}\vec{c} \quad \text{であることから、} \quad s = \frac{2}{7} \times 3 = \frac{6}{7}, \quad u = \frac{4}{5} \text{ を得る。}$$

$$(2) \text{で求めた} \quad \frac{rs}{3} = \frac{1}{2}, \quad r(s-3t) + 3t = 0 \quad \text{に} \quad s = \frac{6}{7} \text{ を代入し} \quad t = \frac{2}{3} \text{ を得る。}$$