数　　学

氏名	

受験番号	

$\boxed{1}$ a は定数とし，関数 $f(x)=|x^2-ax|+|a|$ を考える。関数 $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値を M とする。以下の問に答えよ。

(1) $a \leqq 0$ のとき，M を a の式で表せ。

(2) $a>0$ で $M=f\left(\dfrac{a}{2}\right)$ となるように，定数 a の値の範囲を定めよ。

[解答例]

(1) $a \leqq 0$ のとき，$x^2-ax \geqq 0 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ なので

$$f(x)=x^2-ax-a=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-a$$

したがって，軸は $x=\dfrac{a}{2} \leqq 0$ なので $x=1$ で最大値をとる。すなわち

$$M=f(1)=\underline{1-2a}$$

(2) **(i)** $0<a \leqq 1$ のとき，

$$f(x)=|x(x-a)|+a=\begin{cases}-x^2+ax+a & (0 \leqq x<a)\\ x-ax+a & (a \leqq x \leqq 1)\end{cases}=\begin{cases}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+a & (0 \leqq x<a)\\ \left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+a & (a \leqq x \leqq 1)\end{cases}$$

なので，

$$M=\max\left\{f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}+a,\quad f(1)=1\right\}$$

となる。したがって，$0<a \leqq 1$ かつ $\dfrac{a^2}{4}+a \geqq 1$ のとき，$M=f\left(\dfrac{a}{2}\right)$ となる。すなわち，

$$2\sqrt{2}-2 \leqq a \leqq 1$$

(ii) $a>1$ のとき，$f(x)=-x^2+ax+a=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+a$ なので

$$M=\begin{cases}f\left(\dfrac{a}{2}\right) & (1<a \leqq 2)\\ f(1) & (2<a)\end{cases}$$

(i), (ii) より a の範囲は

$$\underline{2\sqrt{2}-2 \leqq a \leqq 2}$$

数　　学

氏名	

受験番号	

2 方程式

$$2x^4 + Cx^3 + (A+3)x^2 + (B-A)x - B = 0$$

が4つの解 $1, \alpha, \beta, \gamma$ をもつとき, 以下の問に答えよ。ただし, 定数 A, B, C は実数とする。

(1) C を求めよ。

(2) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ を A を用いて表せ。

(3) $\alpha = 1 + 2i$ であるとき, β と γ を求めよ。ただし, γ は実数とする。

[解答例]

(1) 1 が方程式の解であるから

$$0 = 2 + C + (A+3) + (B-A) - B = 5 + C$$

よって $C = -5$

(2) $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + (A+3)x^2 + (B-A)x - B$ とすると $f(1) = 0$ なので, 因数定理より $f(x)$ は $x-1$ で割り切れる。実際

$$f(x) = (x-1)(2x^3 - 3x^2 + Ax + B)$$

となる。したがって α, β, γ は方程式

$$2x^3 - 3x^2 + Ax + B = 0$$

の解である。因数定理より

$$2x^3 - 3x^2 + Ax + B = 2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

と因数分解できる。右辺を展開して係数を比較すると

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{3}{2}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{A}{2}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{B}{2}$$

となることがわかる。したがって

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = \underline{\frac{9}{4} - A}$$

(3) $f(1+2i) = 0$ なので

$$2(1+2i)^3 - 3(1+2i)^2 + A(1+2i) + B = 0$$

整理して,

$$(A + B - 13) + (2A - 16)i = 0$$

したがって, $A = 8,\ B = 5$ となる。このとき,

$$f(x) = (x-1)(2x^3 - 3x^2 + 8x + 5) = (x-1)(2x+1)(x^2 - 2x + 5)$$

と因数分解できるので解は $x = 1,\ -\dfrac{1}{2},\ 1 \pm 2i$ となる。

$$\underline{\beta = 1 - 2i, \quad \gamma = -\frac{1}{2}}$$

数　学

氏名	

受験番号	

3 底面が平行四辺形 OABC である四角錐 D-OABC を考え，点 X を線分 BD を $2:1$ に内分する点，点 P を線分 AD 上の点，点 Q を線分 CD 上の点とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ として，以下の問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$ を用いて表せ。

(2) $\triangle$ACD を含む平面と直線 OX との交点を Y とする。$\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ を $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$ を用いて表せ。

(3) 4 点 O, X, P, Q が同一平面上にあるとき，$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}} \leqq \dfrac{2}{3}$ であることを示せ。

[解答例]

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{a}+\vec{c}$ に注意すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OX}} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c})+\frac{2}{3}\vec{d} \\ &= \underline{\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d}}\end{aligned}$$

(2) 点 Y は線分 OX 上にあるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=t\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\frac{t}{3}\vec{a}+\frac{t}{3}\vec{c}+\frac{2t}{3}\vec{d} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

と表される。また，点 Y は点 A, C, D を含む平面上にあるので $\dfrac{t}{3}+\dfrac{t}{3}+\dfrac{2t}{3}=1$，すなわち $t=\dfrac{3}{4}$ である。したがって，

$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}}$$

(3) 4 点 O, X, P, Q が同一平面上にあるとき OPXQ は三角錐ではなく四角形となる。線分 PQ は $\triangle$ACD に含まれるので対角線 OX と PQ の交点が Y となる。つまり，点 Q, Y, P は同一直線上にある。逆に点 Q, Y , P が同一直線上にあれば 直線 OX と直線 PQ は点 Y で交わるので OXPQ は同一平面上にある。したがって，$\triangle$ACD において CY と 直線 AD の交点を P$'$ とすると AP $\leqq$ AP$'$ であることがわかる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CY}} &= \overrightarrow{\mathrm{OY}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= \frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}-\vec{c} \\ &= \frac{1}{4}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\end{aligned}$$

なので，$\overrightarrow{\mathrm{CP'}}=k\overrightarrow{\mathrm{CY}}$ と表されることに注意すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP'}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+k\overrightarrow{\mathrm{CY}} \\ &= \frac{k}{4}\vec{a}+\left(1-\frac{3k}{4}\right)\vec{c}+\frac{k}{2}\vec{d}\end{aligned}$$

となるが P$'$ は AD 上の点なので $1-\frac{3k}{4}=0$，すなわち $k=\frac{4}{3}$ となる。したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{d}$$

となるので点 P$'$ は AD を $2:1$ に内分する点である。以上より

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}} \leqq \frac{\mathrm{AP'}}{\mathrm{AD}}=\frac{2}{3}$$

数　　　学

氏名	

受験番号	

4 $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，2 つの関数 $x = \cos\theta + \sin\theta$，$y = \cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ について，以下の問に答えよ。

(1) x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) y を x の関数で表せ。

(3) y の最大値と最小値を求めよ。

[解答例]

(1) 三角関数の合成より

$$x = \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

と変形できる。$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \pi + \frac{\pi}{4}$ に注意すると，$\underline{-1 \leqq x \leqq \sqrt{2}}$

(2) (1) より $x = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ なので

$$\begin{aligned} y &= \cos\left\{2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right\} - \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left\{2\cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right\} - \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= x^2 - \frac{x}{\sqrt{2}} - 1 \end{aligned}$$

(3) (1)，(2) より

$$y = x^2 - \frac{x}{\sqrt{2}} - 1 = \left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{9}{8} \qquad \left(-1 \leqq x \leqq \sqrt{2}\right)$$

なので，頂点は $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, -\dfrac{9}{8}\right)$ であり，$x = -1$ のとき $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$x = \sqrt{2}$ のとき $y = 0$，$-1 \leqq \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \leqq \sqrt{2}$ であるから

$$\begin{aligned} x = -1 \quad &\text{のとき最大値} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad &\text{のとき最小値} \quad y = -\frac{9}{8} \end{aligned}$$

となる。

数　　学

氏名	

受験番号	

5 関数 $f(x) = e^{-x}\sin 2x$ について以下の問に答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数を求めよ。

(2) $f(x)$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が $x = a$ で最大となるとき，$\tan a$ を求めよ。

(3) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ とすると $I = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos 2x\ dx$ となることを示せ。

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ を求めよ。

[解答例]

(1) $\underline{f'(x) = -e^{-x}\sin 2x + 2e^{-x}\cos 2x}$

(2) $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$ であるから $a \neq 0, \frac{\pi}{2}$ となる。したがって，$f(x)$ は $x = a$ で最大かつ極大となるから

$$f'(a) = e^{-a}(2\cos 2a - \sin 2a) = 0$$

$e^{-x} \neq 0$ なので $2\cos 2a = \sin 2a$ となる。よって，$\tan 2a = \dfrac{\sin 2a}{\cos 2a} = 2$ となる。2 倍角の公式から

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} = 2$$

これを解いて $\underline{\tan a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

(3) $f'(x) = -f(x) + 2e^{-x}\cos 2x$ より $f(x) = 2e^{-x}\cos 2x - f'(x)$ であるから

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2e^{-x}\cos 2x - f'(x)\right) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos 2x\ dx + [f(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos 2x\ dx$$

(4) 部分積分法 と (3) より

$$\begin{aligned} I &= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{e^{-x}\right\}'\cos 2x\ dx \\ &= -2\left\{\left[e^{-x}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\ dx\right\} \\ &= 2(e^{-\frac{\pi}{2}} + 1) - 4I \end{aligned}$$

したがって，$\underline{I = \dfrac{2(e^{-\frac{\pi}{2}}+1)}{5}}$