（別紙）

タイトル	2023年度　後期日程入試 情報学部情報学科　小論文理系型問題
評価の ポイント	問1 ・　確率を正しく計算できるか。 ・　与えられた規則から漸化式を立てて解くことができるか。 ・　与えられた規則が持つ数理的な性質を発見し，問題解決に応用できるか。 問2 ・　高校で学ぶ整数の割り算，商，余りの基本的な性質について正しく理解しているか。 ・　与えられた定義を正しく理解し，数学的に論証することができるか。 ・　論点を的確にとらえた上で，それに対する見解を自分の言葉で述べることができるか。

氏名	

受験番号	

情報学部 後期日程 小論文 解答用紙

理系型　その１

理　問 1-1

(1)　2 回ボタンを押した後に A にいるためには，A→A→A と遷移することが必要であり，$a_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$である。

2 回ボタンを押して B にいる場合，A→A→B と A→B→B の 2 通りの遷移がある。どちらも確率 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ で発生するので，B にいる確率は$\frac{1}{4}\times 2$であり$b_2=\frac{1}{2}$ 。

(2)　まず，初期状態で駒は A にいるので，$a_0=1$である。k を 0 以上の整数とし，A にいる確率について漸化式をたてると，$a_{k+1}=\frac{1}{2}a_k$ となる。これより， $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n a_0=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $(n\geq 0)$ を得る。

よって， $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 。

(3)　まず，初期状態で駒は B にいないので，$b_0=0$である。kを 0 以上の整数とし，B にいる確率について漸化式をたてると，$b_{k+1}=\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}b_k=\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+\frac{1}{2}b_k$ を得る。両辺に 2^{k+1} をかけて，$2^{k+1}b_{k+1}=1+2^k b_k$ となる。よって，$2^k b_k=k+2^0 b_0=k$ であり，k を n で置き換えて$b_n=\frac{n}{2^n}$ 。

(4)　「ゲーム終了までにボタンを押した回数が n 回以下」の余事象は「n 回ボタンを押したあとで駒が A か B にいてゲームが継続している」ことである。よって，$p_n=1-a_n-b_n=1-\frac{n+1}{2^n}$ 。

選 択 欄

理系型を選択するときは○

採 点 欄

この欄には記入しないこと

氏名	

受験番号	

情報学部 後期日程 小論文 解答用紙

理系型　その 2

理　問 1-2

(1) 最初に駒は X にいるので $x_0 = 1$ 。1 回ボタンを押すと駒は Y か Z に移動するので X に駒はないため，$x_1 = 0$ 。さらにボタンを押すと，駒は確率 $\frac{1}{2}$ で X に戻ってくることになり，$x_2 = \frac{1}{2}$ 。さらにボタンを押すと，仮に X に駒がいても Y か Z に移動するので$x_3 = 0$ 。

(2) ボタンを押す度に駒は移動するため，X にはボタンを押した回数が偶数の時，Y,Z にはボタンを押した回数が奇数のときにのみ駒が存在する。目標を達成するためにはかならず Y,Z の状態から W に移動するため，ボタンを押した回数は偶数でなければいけないのに，G は 5 回で W に到達したと発言したため U は誤りであると断言した。

(3) kを 0 以上の整数とすると，$\{x_k\},\{y_k\},\{z_k\}$ は以下の漸化式を満たす。

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{1}{2}y_k + \frac{1}{2}z_k \\ y_{k+1} = \frac{1}{2}x_k \\ z_{k+1} = \frac{1}{2}x_k \end{cases}, x_0 = 1, y_0 = z_0 = 0$$

このうち，$y_k + z_k$をまとめて，$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{1}{2}(y_k + z_k) \\ y_{k+1} + z_{k+1} = x_k \end{cases}$ となる。

これから，$x_{k+2} = \frac{1}{2}(y_{k+1} + z_{k+1}) = \frac{1}{2}x_k$となる。これより，

n が偶数の時，$x_n = \frac{1}{2}x_{n-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 x_{n-4} = \cdots = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} x_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$ $(n \geq 0)$ であり，

n が奇数の時，$x_n = \frac{1}{2}x_{n-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 x_{n-4} = \cdots = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} x_1 = 0$ $(n \geq 1)$ である。

次に，$y_{k+1} + z_{k+1} = x_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} (k\text{: 偶数}) \\ 0\ (k\text{: 奇数}) \end{cases}$ $(k \geq 0)$ となるので $y_n + z_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} (n\text{: 奇数}) \\ 0\ (n\text{: 偶数}) \end{cases}$ $(n \geq 1)$ である。この式は $n = 0$ の時も $y_0 + z_0 = 0$ となって成立する。以上より，以下の解を得る。

$$x_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} (n\text{: 偶数}) \\ 0\ (n\text{: 奇数}) \end{cases}, \quad y_n + z_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} (n\text{: 奇数}) \\ 0\ (n\text{: 偶数}) \end{cases}$$

選　択　欄

理系型を選択するときは〇

採　点　欄

この欄には記入しないこと

氏名	

受験番号	

情報学部 後期日程 小論文 解答用紙

理系型　その 3

理　問 2-1

・存在することの証明

a は整数，m は正の整数であるので，有理数 a/m が存在する。ゆえに，a/m を超えない最大の整数を考えると

$$qm \leqq a < (q+1)m$$

となる整数 q が存在する。このとき，

$$0 \leqq a - qm < m$$

よって，$r = a - qm$ とおくと，r は整数であり，$a = qm + r$ かつ $0 \leqq r < m$ である。

・一通りに定まることの証明

$a = qm + r = q'm + r'$ かつ $0 \leqq r \leqq r' < m$ となる q, r, q', r' が存在したとする。このとき，$r' - r = (q - q')m$ であり，$0 \leqq r' - r < m$ である。ゆえに，

$$0 \leqq (q - q')m < m$$

よって，$q = q'$ であり， $r = r'$ である。

理　問 2-2

$a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$ ならば，ある整数 l, l' が存在して，

$$a - b = lm, \qquad c - d = l'm$$

ゆえに，

$$ac - bd = a(c-d) + (a-b)d = al'm + lmd = m(al' + dl)$$

よって，

$$ac \equiv bd \pmod{m}$$

選 択 欄

理系型を選択するときは○

採 点 欄

この欄には記入しないこと

氏名	

受験番号	

情報学部 後期日程 小論文 解答用紙

理系型　その 4

理　問 2-3

位取りの基礎を 2 として 100 を表すと，$100 = 2^6 + 2^5 + 2^2 = 64 + 32 + 4$ より，$3^{100} = 3^{64} \times 3^{32} \times 3^4$ である。一方で，

$$\begin{gathered} 3^2 \equiv 3 \times 3 \equiv 9 \pmod{13}, \\ 3^4 \equiv 3^2 \times 3^2 \equiv 9 \times 9 \equiv 3 \pmod{13}, \\ 3^8 \equiv 3^4 \times 3^4 \equiv 3 \times 3 \equiv 9 \pmod{13}, \\ 3^{16} \equiv 3^8 \times 3^8 \equiv 9 \times 9 \equiv 3 \pmod{13}, \\ 3^{32} \equiv 3^{16} \times 3^{16} \equiv 3 \times 3 \equiv 9 \pmod{13}, \\ 3^{64} \equiv 3^{32} \times 3^{32} \equiv 9 \times 9 \equiv 3 \pmod{13} \end{gathered}$$

ゆえに，

$$3^{100} \equiv 3^{64} \times 3^{32} \times 3^4 \equiv 3 \times 9 \times 3 \equiv 27 \times 3 \equiv 1 \times 3 \equiv 3 \pmod{13}$$

よって，3^{100} を 13 で割った余りは 3 である。

理　問 2-4

3^{100} を 13 で割った余りを求めるために，$3^{100} = 3 \times 3 \times \cdots \times 3$ を手計算で求めるならば，掛け算を $100 - 1 = 99$ 回必要とする。一方で，問 2-3 の方法ならば，掛け算の回数を削減できる。実際に問 2-3 の方法での掛け算の回数を求めると，まず $3^{100} = 3^{64} \times 3^{32} \times 3^4$ を得るために，3^{64} と 3^{32} と 3^4 との掛け算が 2 回必要である。次に，

$$\begin{gathered} 3^2 = 3 \times 3, \\ 3^4 = 3^2 \times 3^2, \\ 3^8 = 3^4 \times 3^4, \\ 3^{16} = 3^8 \times 3^8, \\ 3^{32} = 3^{16} \times 3^{16}, \\ 3^{64} = 3^{32} \times 3^{32} \end{gathered}$$

であるから，3^{64} を得るまでに掛け算が 6 回必要

選 択 欄

理系型を選択するときは〇

採 点 欄

この欄には記入しないこと